

L'anàlisi local i no local d'imatges i algunes aplicacions

ANTONI BUADES, BARTOMEU COLL, JEAN-MICHEL MOREL

Resum La major part dels mètodes de filtratge o restauració d'imatges es basen en la propietat de fer mitjanes dels valors del color. Un dels més coneguts és l'anomenat filtre d'entorn o bé *filtre-sigma*, el qual reemplaça el valor actual d'un píxel per una mitjana dels píxels que són propers tant en l'espai com de color. Aquest tipus de filtres produeixen un efecte de xoc, el qual pot ser interpretat en termes d'una EDP geomètrica. D'una banda, i basat en un treball recent dels mateixos autors, es presenta un estudi de la relació que existeix entre els filtres d'entorn i les EDP i es dona una variant del filtre d'entorn i la seva EDP associada, i l'equació de la curvatura mitjana que permet resoldre el problema de xoc. D'altra banda, es presenta un model no local de restauració d'imatges, l'*NL-means*, introduït pels mateixos autors en un treball inicial del 2005, basat en l'autosimilitud de la mateixa imatge, el qual preserva la seva estructura i millora en gran part els algorismes existents dins aquest camp. Finalment, aquesta mateixa idea no local es pot extrapolar a altres aplicacions, com és el cas de pel·lícules i la interpolació de dades a partir d'un submostreig d'aquestes.

Paraules clau: imatges digitals, restauració, anàlisi, mitjanes no locals.

Classificació MSC2000: 68U10, 68H35.

1 Introducció

En els darrers anys, les imatges digitals han envaït la nostra vida quotidiana (fotografia, càmeres de vídeo, pel·lícules...). Les càmeres digitals permeten visualitzar i manipular més fàcilment les imatges. La seva qualitat és en aquest moment equivalent i sovint superior si ho comparem amb les imatges obtingudes per mitjans fotoquímics. Les imatges digitals ofereixen, a més, els grans avantatges de poder ser transmeses, millorades i emmagatzemades en suports informàtics. Les aplicacions recorren dominis tan diversos com les imatges mèdiques, fotografia comercial, restauració de pel·lícules antigues, aplicacions militars, imatges preses des de satèl·lit...

En qualsevol cas, les imatges numèriques encara presenten certs entrebancs, sobretot des del punt de vista de la fotografia digital. Aquestes imatges tenen en particular un soroll de fons que en limita la visibilitat. Per comprendre l'origen del soroll visual, hem de remarcar que una imatge numèrica es presenta com a un rectangle dividit en petits quadrats, els anomenats *pixels*. Cada píxel és el resultat d'una mesura, generalment feta per una matriu de captors anomenada CCD (de l'anglès *Charge Couple Device*). Un píxel correpon a un petit quadrat de la matriu CCD, en el qual es compta el nombre de fotons que hi arriben. Cada píxel conté tres números que agafen valors entre 0 i 255, i ens indiquen la quantitat de vermell, verd i blau que conté el píxel. Una combinació adequada d'aquests tres números permet, en principi, reproduir qualsevol color sobre la pantalla de l'ordinador. En tota imatge digital presa per una CCD, els tres valors dels colors observats presenten una certa incertesa com a conseqüència del soroll. Aquesta aleatorietat és a causa de la incertesa en el recompte de fotons que arriben dins cada captor (fotons paràsits) i així, doncs, els valors dels colors mesurats són valors pertorbats.

El model de soroll acceptat més comunament és l'additiu, blanc i gaussià. Aquest model considera que un valor aleatori donat per una variable aleatòria gaussiana s'afegeix al vertader valor del píxel

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + f(u_0(\mathbf{x}))n(\mathbf{x}). \quad (1)$$

En un model additiu, els valors del soroll en dos píxels diferents que tenien el mateix color subjacent u_0 se suposa que són independents, hipòtesi que és realista per a les CCD. A la pràctica, això significa que cap estructura o informació d'interès s'afegeix a la imatge a causa del soroll com ha notat Attneave [3].

La reducció del soroll en les imatges digitals està lligada en gran mesura a la tecnologia de la càmera. La talla dels captors CCD està dictada en part per l'exigència de reducció del soroll, ja que el nombre de fotons que un captor rep en una presa fotogràfica és proporcional a la seva superfície. Un captor petit rebrà pocs fotons i així, doncs, el resultat serà una imatge amb bastant de soroll. El mateix passa si el temps d'exposició de la imatge és massa curt o en el cas en què a l'escena li manqui lluminositat. En aquests casos la càmera digital permet corregir aquest defecte tan sols augmentant el contrast numèric. El problema associat és l'augment en la mateixa proporció del soroll.

El principi de la majoria dels mètodes de restauració és simple: consisteix a reemplaçar el color d'un píxel per la mitjana dels valors dels seus píxels veïns. Aquest mètode és ben conegut en el món dels estadístics, ja que quan es fa la mitjana de quatre valors de colors veïns per trobar un color mitjà, el soroll es divideix per dos. Malauradament, aquest raonament només és vàlid si els píxels veïns d'un píxel donat de la imatge tenen el mateix color. Per veure en quina casta de problema ens trobem, mirem per exemple el píxel vermell que es troba al mig de la figura 1. Aquest píxel té cinc píxels veïns vermells i tres de blaus. Si reemplaçam el color d'aquest píxel per la mitjana dels colors dels píxels veïns, llavors el color es tornarà més tirant al blau. El mateix procés

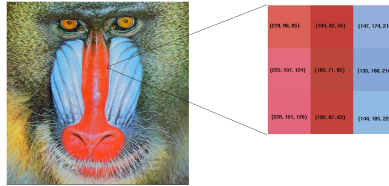


FIGURA 1: Una imatge digital és un conjunt de quadrats anomenats píxels. Dins cada quadrat, un vector de tres valors quantifica el color dels components vermell, verd i blau.

farà també que els píxels blaus tirin cap al vermell. Així, doncs, la frontera del vermell i del blau esdevindrà menys nítida. Com a conseqüència, la imatge esdevé perceptivament difuminada.

Així, doncs, sembla que per restaurar el píxel vermell del centre, la solució és fer una mitjana dels valors dels píxels vermells veïns, excloent-ne els píxels de color blau. Aquest mètode és el que emprava un algorisme clàssic, el *filtre-sigma* [17, 22]. Així, el filtre-sigma, o filtre d'entorn, substitueix el valor del píxel vermell \mathbf{x} per la mitjana dels valors dels píxels vermells que estan dins un entorn $B_\rho(\mathbf{x})$ i que tenen un valor similar al seu, com es pot veure a la figura 1. Resumint, els filtres d'entorn agafen com a nou valor de color una mitjana dels valors dels píxels que són al mateix temps propers en l'espai i amb un nivell de gris o color similar. Per a $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$NF_{h,\rho}u(\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{h^2}\right) d\mathbf{y}, \quad (2)$$

on $B_\rho(\mathbf{x})$ és una bolla de centre \mathbf{x} i radi ρ , h és un paràmetre de filtratge i $C(\mathbf{x}) = \int_{B_\rho(\mathbf{x})} \exp\left(-\frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{h^2}\right) d\mathbf{y}$ és el terme de normalització. Encara així, els experts en fotografia retreuen a aquest mètode la creació de certes irregularitats, bàsicament falsos detalls i regions planes. A [7, 6] s'ha provat que aquests filtres són equivalents a l'equació de Perona-Malik, una equació en derivades parcials que crea les mateixes inestabilitats que el filtre d'entorn. Dins aquest mateix estudi, s'ha proposat una formulació alternativa del filtre que és asimptòticament equivalent a l'equació del moviment per la curvatura mitjana. Aquesta nova formulació manté els avantatges del filtre exposat abans i al mateix temps elimina els inconvenients de la creació de zones planes i falsos detalls.

Les comparacions del nivell de gris que es fan quan s'apliquen els filtres locals no són del tot robustes. Els valors de gris originals són modificats seguint el model (1) i, per tant, aquests nous valors no són del tot fiables. Per aquest motiu, els filtres s'apliquen localment, amb ρ bastant petit, i així es redueix el risc de triar valors similars falsos.

Existeix un mètode per saber si realment l'aplicació d'un algorisme de filtratge de la imatge ha donat resultat. Simplement, es tracta de fer la diferència

entre la imatge abans i després d'aplicar-li l'algorisme i comprovar que la diferència s'assembla a un soroll. La visualització d'aquesta diferència, anomenada als nostres treballs el *method noise*, i el seu estudi matemàtic, han estat una part del treball [5].

La definició de criteris adequats per a l'avaluació d'algorismes de restauració i filtratge d'imatges ha estat també uns dels problemes tractats dins aquest estudi (vegeu [8]). S'ha proposat l'anomenat criteri *noise to noise*, el qual força un algorisme donat a transformar un soroll blanc en un altre soroll blanc de desviació típica més petita. Aquest criteri, que pot semblar contradictori, assegura la no creació d'artefactes dins les zones planes de la imatge. S'ha provat, matemàticament i experimentalment, que només els filtres d'entorn verifiquen el criteri *noise to noise*, dins tot un conjunt d'algorismes de tractament d'imatges, incloent-hi els filtres per llindar sobre els coeficients d'una base, tipus onetes (*wavelets*).

La solució que proposam a [5] per obtenir un mètode de restauració sense artefactes consisteix a fer una mitjana de tots els píxels de la imatge que siguin similars en un sentit més ampli que el filtre d'entorn. Aquest mètode és més robust al soroll i permet la comparació de píxels llunyans entre si. Aquest ja és un canvi important dins la concepció de l'algorisme. Tots els algorismes anteriors combinen els píxels veïns per fer una mitjana local. La nova proposta bàsicament té en compte la similitud a nivell de color de tots els píxels de la imatge. D'aquí el nom de mitjanes no locals o *non-local means*, NL-means, que hem donat a l'algorisme.

La figura 2 permet comprendre el procediment del model *NL-means*. Sembla lògic que un detall d'una imatge es repeteixi en diferents llocs de la mateixa imatge. És a dir, les imatges compleixen un principi d'autosimilitud. El primer treball que va tenir en compte aquest principi va ser el de dos investigadors de la Universitat de Califòrnia, a Berkeley, Alexei Efros i Thomas Leung, l'any 1999 [11], que el varen emprar per sintetitzar textures dins les imatges. En el nostre cas, basat en la idea de fer les mitjanes dels valors dels píxels similars en tota la imatge, el model proposat serveix per eliminar el soroll de les imatges. Aquesta mitjana preserva la integritat de la imatge i al mateix temps redueix les oscil·lacions causades pel soroll. El model és

$$NLu(\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{(G_{\rho} * |u(\mathbf{x} + \cdot) - u(\mathbf{y} + \cdot)|^2)(0)}{h^2}\right) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (3)$$

on G_{ρ} és un nucli gaussià de desviació típica ρ , $C(\mathbf{x})$ és el terme de normalització i

$$(G_{\rho} * |u(\mathbf{x} + \cdot) - u(\mathbf{y} + \cdot)|^2)(0) = \int_{\mathbb{R}^2} G_{\rho}(\mathbf{t}) |u(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - u(\mathbf{y} + \mathbf{t})|^2 d\mathbf{t}.$$

Aquesta fórmula ens diu que el valor $u(\mathbf{x})$ de la imatge es reemplaça per una mitjana ponderada dels valors $u(\mathbf{y})$ on els pesos associats als píxels \mathbf{y} són significatius només si una finestra gaussiana al voltant de \mathbf{y} és similar a la seva



FIGURA 2: És estrany que un detall dins una imatge no es repeteixi en altres indrets de la mateixa imatge. Els grups de quadrats de colors indiquen alguns grups de petites zones de la imatge que són gairebé indistingibles entre si.

finestra corresponent al voltant del píxel \mathbf{x} . Els pesos normalitzats així obtinguts, $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, formen per a cada \mathbf{x} una distribució de probabilitat associada a \mathbf{x} .

La visualització d'aquestes distribucions de probabilitat permet adonar-se de l'elecció dels pesos quan ho aplicam a una imatge. La figura 3 mostra com s'adapten localment aquestes distribucions segons la geometria local de la imatge. Aquesta adaptació a cada configuració geomètrica segueix l'esperit de la teoria de la Gestalt. Els píxels similars s'agrupen per formar estructures coherents, les quals tenen en compte també la regularitat local de la imatge (d'aquí el lligam amb les equacions en derivades parcials), la periodicitat eventual local (d'aquí el lligam amb l'anàlisi de Fourier) i finalment, el lligam amb els camps de Markov, ja que es tracta de la predicció del valor d'un píxel a partir dels seus veïns, coneixent els valors de la resta de la imatge.

A causa de la natura de l'algorisme, el cas més favorable per al mètode és el cas periòdic o texturat. En aquest cas, per a cada píxel de la imatge es pot trobar un conjunt considerable de punts amb una configuració similar. La transformada de Fourier de les imatges amb soroll i la restaurada mostren l'adaptació de l'algorisme per preservar les freqüències altes de la imatge (vegeu la figura 4). Però aquest fet encara s'ha d'estudiar formalment i queda com un problema d'estudi la unificació de l'anàlisi no local i l'anàlisi de Fourier.

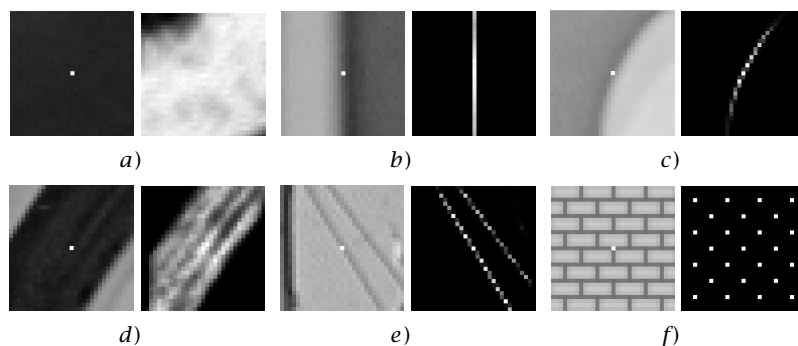


FIGURA 3: A la part dreta de cada parell es pot veure la distribució de probabilitats emprada per l'algorisme de mitjanes no locals (*NL-means*) per estimar el valor del píxel del centre de la imatge de l'esquerra.

Quan comparem el model de l'*NL-means* amb els altres models existents més clàssics, la seva millora és evident. D'altra banda, aquest nou algorisme és la base d'un tipus d'anàlisi no local que es pot aplicar a altres problemes relacionats amb el camp de les imatges digitals, com és el cas de la restauració de pel·lícules, interpolació de colors o *demosaicking*, multiresolució... El tret en comú d'aquests problemes és la recuperació de la informació original a partir d'una sèrie de mostres, basant-se en la propietat de l'autosimilitud o repetició de la informació en la mateixa imatge.

Després de la introducció que hem fet al problema de la restauració i filtratge d'imatges digitals i la presentació dels filtres de mitjanes (el clàssic model local i el model no local proposat en un article dels mateixos autors), el treball queda configurat de la manera següent. A la secció 2, presentem uns models basats en EDP que s'apliquen al filtratge d'imatges i provam la relació existent entre els filtres d'entorn i aquestes EDP. A causa d'aquest estudi, s'ha pogut identificar el perquè de la creació de certes irregularitats o artefactes en la mateixa imatge quan s'aplica el filtre d'entorn i s'ha proposat una solució al problema. A la secció 3, donam un model probabilístic per al *NL-means* i n'estudiam la consistència. Al mateix temps, i basat en la idea no local que s'ha introduït amb l'*NL-means*, donam dues aplicacions per al cas de multiimatges en els quals el mètode s'adapta de manera natural: l'aplicació a la restauració de pel·lícules i el problema d'interpolació o *demosaicking*. Finalment, a la secció 4 donam una sèrie de conclusions i possibles aplicacions al voltant de l'*NL-means*.

2 Models locals per al filtratge d'imatges

En aquesta secció introduïrem alguns models clàssics d'EDP per al filtratge d'imatges i n'estudiarem la relació amb els filtres d'entorn. També analitzarem el problema de la creació de certes irregularitats o artefactes que apareixen quan aplicam aquest tipus de model des del punt de vista de l'EDP subjacent.

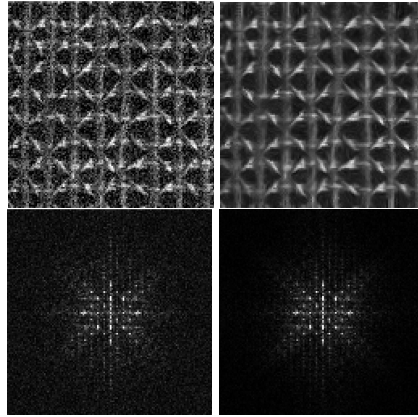


FIGURA 4: Experiència amb l'*NL-means* i una imatge texturada. Dalt: imatge amb soroll i imatge restaurada. Baix: transformada de Fourier de les imatges de dalt. Les transformades de Fourier mostren que les principals característiques de la imatge són preservades, fins i tot les freqüències altes.

2.1 Models d'EDP per al filtratge d'imatges

Basat en la teoria de Shanon, un senyal pot ser representat correctament per un conjunt discret de valors, les mostres, només si ha estat prèviament regularitzat. Sigui u_0 la imatge física, una funció real fitada definida sobre un conjunt fitat $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Aleshores, per obtenir una imatge observable, se li aplica una convolució amb un nucli k , $k * u_0$, on k normalment ve donat per la funció gaussiana. Gabor va provar que la diferència entre la imatge original i la regularitzada és bàsicament proporcional a la seva laplaciana, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Si introduïm un paràmetre d'escala h per al nucli k , de tal manera que $k_h(\mathbf{x}) = h^{-1}k(h^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x})$, llavors si u és C^2 i fitat i k és integrable i radial, aleshores

$$\frac{u_0 * k_h(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})}{h} \rightarrow \Delta u_0(\mathbf{x}), \quad h \rightarrow 0.$$

Per tant, quan h es fa més petit, el procés de convolució tendeix cap a l'equació de la calor

$$u_t = \Delta u, \quad u(0) = u_0.$$

Així, doncs, Gabor va establir una primera relació entre els operadors locals de regularització i les EDP. Aquesta convolució difumina les discontinuïtats i elimina les altes freqüències de la imatge. Per aquest motiu, els darrers treballs sobre el tema introdueixen nuclis que s'adaptin a la configuració local de la imatge.

El filtre anisotròpic (AF) intenta evitar l'efecte de difuminació de la funció gaussiana fent la convolució de la imatge u al \mathbf{x} només en la direcció ortogonal

FIGURA 5: Experiència de l'*NL-means* amb una imatge natural.

al gradient $Du(\mathbf{x})$. Si $Du(\mathbf{x}) \neq 0$ i denotam respectivament per

$$\xi = Du(\mathbf{x})^\perp / |Du(\mathbf{x})|, \quad \eta = Du(\mathbf{x}) / |Du(\mathbf{x})|$$

les direccions tangent i ortogonal a la línia de nivell que passa per \mathbf{x} , llavors

$$AF_h u(\mathbf{x}) = \int G_h(t) u(\mathbf{x} + t\xi) dt,$$

on $G_h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp(-\frac{t^2}{2h^2})$ denota la funció gaussiana 1-dimensional amb variança h^2 . Als punts on $Du(\mathbf{x}) = 0$ s'aplica un filtre isotròpic gaussià. Aquest filtre anisotròpic preserva millor les discontinuïtats, però en canvi té problemes en les regions planes i en regions amb textura. En aquest cas, també podem establir una relació entre aquest operador de difusió anisotròpica i les EDP, i el resultat que s'obté ve donat per la relació

$$u(\mathbf{x}) - AF_h(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}D^2u \left(\frac{Du^\perp}{|Du|}, \frac{Du^\perp}{|Du|} \right) + o(h^2) = -\frac{1}{2}|Du| \text{curv}(u) + o(h^2),$$

i, per tant, localment l'equació resultant és l'anomenada *equació de la curvatura mitjana*.

D'altra banda i tenint en compte que la difuminació òptica és equivalent a aplicar l'equació de la calor un sol pas, Gabor va deduir que, en algun sentit, podem invertir el procés de difuminació simplement invertint el temps en l'equació de la calor, $u_t = -\Delta u$. Numèricament, aquest fet és equivalent a llevar de la imatge original la seva imatge filtrada, és a dir,

$$u - G_h * u = -h^2 \Delta u + o(h^2).$$

Aquest procés ens porta a considerar l'equació de la calor inversa com un procés de restauració de la imatge, encara que sigui un problema mal posat des del punt de vista formal. Osher-Rudin [18] proposaren el model del *shock filter*

$$u_t = -\text{sign}(\mathcal{L}(u))|Du|, \quad (4)$$

on el terme de propagació $|Du|$ és ponderat pel signe de l'operador de detecció de contorns $\mathcal{L}(u)$. La funció $\mathcal{L}(u)$ canvia de signe quan es troba un contorn i llavors es crea un efecte de realçament. A la pràctica, $\mathcal{L}(u) = \Delta u$ i l'equació es relaciona amb l'equació de la calor inversa.

L'equació de Perona-Malik [19], relacionada amb el procés de difusió anisotròpica, està d'alguna manera inspirada en la idea de Gabor. L'equació ve donada per

$$u_t = \operatorname{div} \left(g(|Du|^2) Du \right), \quad (5)$$

on $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ és una funció decreixent que satisfà $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$. Aquest model es relaciona amb els anteriors fent solament una descomposició de l'operador de difusió. En efecte, considerem les segones derivades de u en les direccions de Du i Du^\perp ,

$$u_{\eta\eta} = D^2u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right), \quad u_{\xi\xi} = D^2u \left(\frac{Du^\perp}{|Du|}, \frac{Du^\perp}{|Du|} \right).$$

Llavors, l'equació (5) es pot escriure en la forma

$$u_t = g(|Du|^2) u_{\xi\xi} + h(|Du|^2) u_{\eta\eta}, \quad (6)$$

on $h(s) = g(s) + 2sg'(s)$. Perona i Malik proposaren la funció $g(s) = \frac{1}{1+s/k}$. En aquest cas, el coeficient del primer terme és sempre positiu i, per tant, aquest terme apareix com una difusió 1-dimensional en la direcció ortogonal al gradient. El signe del segon coeficient, en canvi, depèn del valor del gradient. Quan $|Du|^2 < k$, aquest segon terme apareix com una difusió 1-dimensional en la direcció del gradient, mentre que en el cas $|Du|^2 > k$ apareix un procés donat per l'equació de la calor inversa 1-dimensional.

L'equació de Perona-Malik ha tingut diferents variants i extensions. Tannenbaum i Zucker [15] proposaren, en un context més general dins l'anàlisi de formes, l'equació més simple donada per l'equació de la curvatura mitjana

$$u_t = |Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = u_{\xi\xi}.$$

Aquesta equació ja havia estat proposada abans en un altre context per Sethian [21] dins l'estudi algorísmic de propagació de fronts i també en un treball de Alvarez-Lions-Morel [1] sobre les EDP per al filtratge d'imatges i que són invariants a certs principis. Aquesta darrera equació és una «pura» difusió en la direcció ortogonal al gradient i és equivalent al filtre anisotròpic AF ,

$$AF_h u - u = \frac{1}{2} u_{\xi\xi} h^2 + o(h^2).$$

Un model variacional en la restauració d'imatges és el model de la variació total de Rudin-Osher-Fatemi [20], el qual minimitza la variació total de la imatge

$$TV(u) = \int |Du|,$$

restringida a alguns lligams. El mètode del descens del gradient per aquesta energia ho transforma, formalment, a resoldre l'equació

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) \quad (7)$$

la qual està relacionada amb l'equació de la curvatura mitjana i l'equació de Perona-Malik quan $g(|Du|^2) = \frac{1}{|Du|}$. Aquest cas particular, el qual no és considerat a [19], ens porta novament a (7). A [2] s'estudia el problema de l'existència i la unicitat per a aquesta darrera equació.

2.2 Relació asimptòtica de filtres d'entorn i les EDP

El resultat següent ens dona la relació asimptòtica que existeix entre els filtres d'entorn i els models d'EDP per a la restauració d'imatges, i generalitza els casos del filtre gaussià i del filtre anisotròpic clàssics (vegeu els treballs [6] i [7] per a una ampliació dels resultats). Donat $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ i una funció u definida sobre Ω , recordem que el filtre d'entorn NF aplicat al punt \mathbf{x} es defineix com

$$NF_{h,\rho}u(\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \exp \left(-\frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{h^2} \right) d\mathbf{y}, \quad (8)$$

on $B_\rho(\mathbf{x})$ és un entorn de centre \mathbf{x} i radi ρ . Llavors el resultat que s'obté, el qual es pot generalitzar a \mathbb{R}^N , és el següent:

1 TEOREMA *Sigui $u \in C^2(\Omega)$ i $\rho, h, \alpha > 0$ tal que $\rho, h \rightarrow 0$ i $h = O(\rho^\alpha)$. Considerem la funció contínua \tilde{g} definida per $\tilde{g}(t) = \frac{1}{3} \frac{t \exp(-t^2)}{E(t)}$, per a $t \neq 0$, $\tilde{g}(0) = \frac{1}{6}$, on $E(t) = 2 \int_0^t \exp(-s^2) ds$. Sigui \tilde{f} la funció contínua definida per*

$$\tilde{f}(t) = 3\tilde{g}(t) + \frac{3\tilde{g}(t)}{t^2} - \frac{1}{2t^2}, \quad \tilde{f}(0) = \frac{1}{6}.$$

Llavors, per a $\mathbf{x} \in \Omega$,

1. Si $\alpha < 1$,

$$NF_{h,\rho}u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{6} \rho^2.$$

2. Si $\alpha = 1$,

$$NF_{h,\rho}u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \simeq \left[\tilde{f} \left(\frac{\rho}{h} |Du(\mathbf{x})| \right) u_{\eta\eta}(\mathbf{x}) + \tilde{g} \left(\frac{\rho}{h} |Du(\mathbf{x})| \right) u_{\xi\xi}(\mathbf{x}) \right] \rho^2.$$

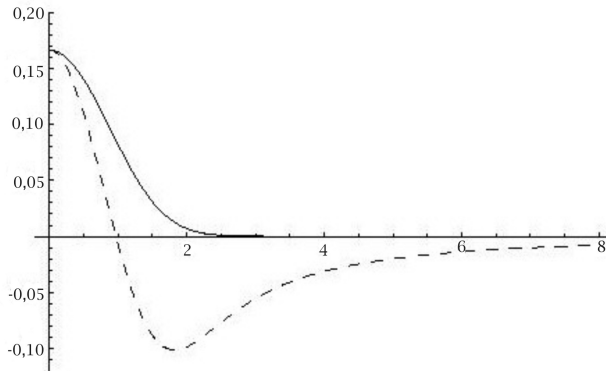


FIGURA 6: Funcions de pesos \tilde{g} (línia contínua) i \tilde{f} (línia discontinua) del teorema 1, quan h i ρ tenen el mateix ordre.

Interpretació del resultat D'acord amb el resultat del teorema 1, el filtre 2D actua com una EDP d'evolució amb dos termes. El primer és proporcional a la segona derivada de u en la direcció $\xi = Du(\mathbf{x})^\perp / |Du(\mathbf{x})|$, la qual és tangent a la línia de nivell que passa pel punt \mathbf{x} . El segon terme és proporcional a la segona derivada de u en la direcció $\eta = Du(\mathbf{x}) / |Du(\mathbf{x})|$ la qual és ortogonal a la línia de nivell que passa per \mathbf{x} . Les equacions d'evolució

$$u_t = c_1 u_{\xi\xi} \quad \text{i} \quad u_t = c_2 u_{\eta\eta}$$

actuen com un model de filtratge o realçament dependent dels signes de c_1 i c_2 . Partint dels resultats del teorema anterior, podem distingir dos casos en funció dels valors de h i ρ .

Si l'ordre de h és més gran que l'ordre de ρ , llavors les segones derivades tenen un pes donat per la mateixa constant i, per tant, la suma dels dos termes és equivalent a aplicar la laplaciana de u i, consegüentment, el filtratge amb la funció gaussiana.

Si h i ρ tenen el mateix ordre de magnitud, el filtre actua com un algorisme de filtratge/realçament. El coeficient de la difusió en la direcció tangencial, $u_{\xi\xi}$, és donat per $\tilde{g}(\frac{\rho}{h}|Du|)$. La funció \tilde{g} és positiva i decreixent. Així, sempre hi ha difusió en aquesta direcció. El pes de la difusió normal, $u_{\eta\eta}$ és donat per $\tilde{f}(\frac{\rho}{h}|Du|)$. Com que la funció \tilde{f} pren valors positius i negatius (vegeu la figura 6), el filtre es comporta com un algorisme de filtratge/realçament en la direcció normal i dependent de $|Du|$. Si \tilde{B} denota el zero de \tilde{f} , llavors s'aplica un model de filtratge sempre que $|Du| < \tilde{B}\frac{h}{\rho}$ i una estratègia de realçament al cas $|Du| > \tilde{B}\frac{h}{\rho}$. La intensitat del filtratge en la direcció tangent i el realçament en la direcció normal tendeixen a zero quan el mòdul del gradient tendeix a infinit. Així, els punts que tenen un gradient molt alt no són alterats pel procés del filtratge. Observem que quan ρ i h tenen el mateix ordre, el filtre d'entorn es comporta asimptòticament com el model de Perona-Malik.

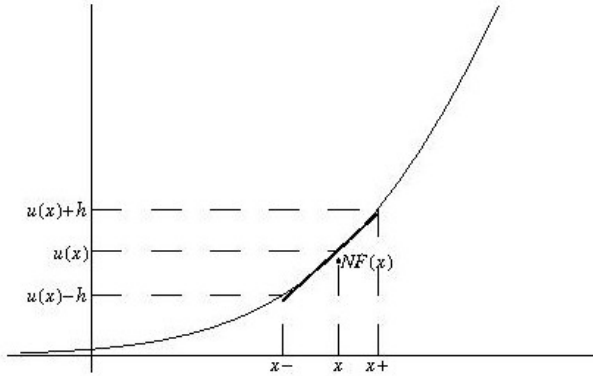


FIGURA 7: En aquesta figura es veu l'efecte de xoc del filtre NF sobre un senyal convex. El nombre de punts y que satisfan $u(x) - h < u(y) \leq u(x)$ és més gran que el nombre dels que satisfan $u(x) \leq u(y) < u(x) + h$. Així, la mitjana $NF(x)$ és més petita que $u(x)$, realçant la part del senyal. La recta de regressió de u a (x_-, x_+) és la que aproxima millor el senyal a x .

Les imatges de dalt a la dreta i de baix a l'esquerra de les figures 9 i 10 mostren l'efecte de realçament i la creació de zones planes i falsos contorns quan s'aplica el filtre d'entorn i el filtre de Perona-Malik sobre una imatge natural.

2.2.1 Una correcció del filtre d'entorn per a la regressió lineal A l'apartat anterior, hem mostrat l'efecte de realçament del filtre d'entorn. Hem vist que el filtre d'entorn, com el model de Perona-Malik, pot crear zones planes i contorns falsos dins les regions regulars. Aquest efecte depèn fortament de l'elecció d'un llindar sobre la norma del gradient, el qual s'ha de fixar a priori i ha de ser el que millor s'adapti per separar les regions regulars dels contorns. En el cas 1D, la figura 7 ens mostra amb més detall l'efecte de realçament. En aquesta mateixa figura es mostra la recta de regressió que aproxima u dins $(u^{-1}(u(x) - h), u^{-1}(u(x) + h))$. Es pot veure com el valor de la recta al punt x aproxima de manera òptima el senyal. Llavors, en aquesta secció proposam corregir el model del filtre d'entorn per aquesta regressió lineal aplicada al mateix filtre. En el cas 2D es tracta de trobar localment el millor pla que aproxima la imatge u en $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en el sentit següent:

$$\min_{a,b,c} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (u(\mathbf{y}) - ay_1 - by_2 - c)^2 d\mathbf{y}, \quad w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{h^2}\right), \quad (9)$$

i reemplaçar $u(\mathbf{x})$ pel valor de filtratge $LNf_{h,\rho}u(\mathbf{x}) = ax_1 + bx_2 + c$.

El resultat següent analitza el comportament asimptòtic de la correcció feta per la regressió lineal quan $\alpha = 1$, ja que és el cas en què existeix xoc i el més interessant de cara al seu estudi.

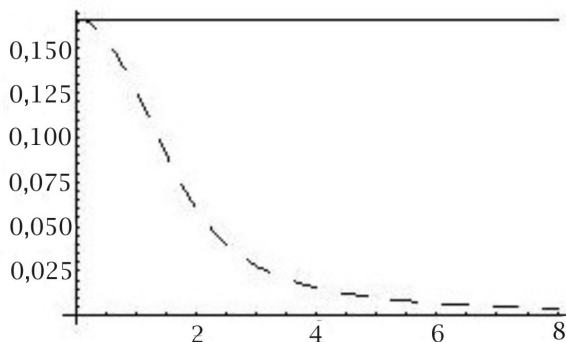


FIGURA 8: Funcions de pesos del teorema 2. Funció constant igual a $1/6$ (línia contínua) i la funció f (línia discontinua).

2 TEOREMA *Suposem $u \in C^2(\Omega)$, i sigui $\rho, h, \alpha > 0$ tal que $\rho, h \rightarrow 0$ i $h = O(\rho)$. Sigui f una funció contínua definida per $f(0) = \frac{1}{6}$,*

$$f(t) = \frac{E(t) - 2t \exp(-t^2)}{2t^2 E(t)},$$

per a $t \neq 0$, on $E(t) = 2 \int_0^t \exp(-s^2) ds$. Llavors per a $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$LNF_{h,\rho} u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \simeq \left[f\left(\frac{\rho}{h} |Du(\mathbf{x})|\right) u_{\eta\eta}(\mathbf{x}) + \frac{1}{6} u_{\xi\xi}(\mathbf{x}) \right] \rho^2.$$

Interpretació del resultat Com veiem en el resultat del teorema anterior, l'operador de filtratge es pot escriure com la suma de dos termes de difusió en la direcció de ξ y η . La funció que pondera la difusió tangent és una constant positiva. La funció que pondera la difusió en la direcció normal és positiva i decreixent (vegeu la figura 8). L'algorisme combina la difusió tangent i normal sempre que el mòdul del gradient sigui petit, mentre que, quan el gradient és gran, la difusió normal es cancel·la i la imatge només és filtrada en la direcció tangencial. Aquesta difusió provoca que les línies de nivell evolucionin de manera proporcional a la seva curvatura. En el model de Perona-Malik la difusió s'atura a prop dels contorns. En aquest cas, els contorns es filtren pel moviment de la curvatura mitjana.

Com en un esquema numèric, el filtre d'entorn corregit per la regressió lineal permet la implementació del moviment de la curvatura mitjana sense el càlcul dels gradients i les seves orientacions. Quan el mòdul del gradient és petit, el comportament de la regressió lineal és similar al de l'equació de la calor. Aquest efecte ja es dona en esquemes numèrics que implementen el moviment

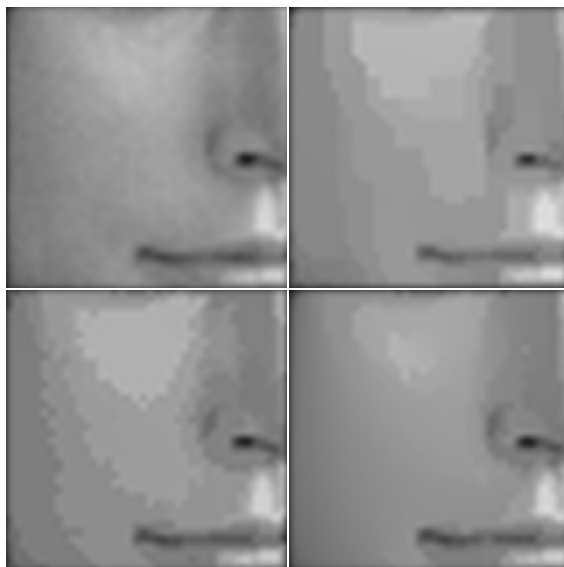


FIGURA 9: Experiment comparatiu sobre el model de Perona-Malik, el filtre d'entorn i la seva millora donada per la correcció lineal. A dalt a l'esquerra: imatge original. A dalt a la dreta: imatge filtrada per Perona-Malik. A baix a l'esquerra: imatge filtrada pel filtre d'entorn. A baix a la dreta: imatge filtrada per la correcció lineal del filtre d'entorn. Els experiments sobre el filtre d'entorn han estat millorats per la iteració de la versió discreta de les definicions (8) i (9). El filtre d'entorn i la modificació donada per la regressió lineal s'han aplicat amb els mateixos valors de h i ρ . Les imatges que es mostren han estat aconseguides amb el mateix nombre d'iteracions. L'equació de Perona-Malik ha estat implementada per l'esquema en diferències finites proposat en el seu article original.

de la curvatura mitjana. En zones planes, el gradient no està ben definit i llavors s'ha d'aplicar algun filtratge isotròpic. En qualsevol cas, la correcció del filtre d'entorn per la regressió lineal estén el moviment de la curvatura mitjana i dóna un esquema numèric estable per al seu càlcul, independentment de les orientacions donades pel gradient.

La figura 9 compara el filtre d'entorn i el model de Perona-Malik. Podem veure una imatge natural i les imatges filtrades pels dos models. Aquestes solucions tenen una qualitat visual similar i s'hi pot veure l'aparició de zones planes i contorns artificials a l'interior de les regions regulars. Aquest efecte és gairebé eliminat quan aplicam el filtre d'entorn amb la millora de la regressió lineal. La figura 10 corrobora aquesta impressió visual. Les línies de nivell de la imatge original tendeixen a concentrar-se, creant zones planes separades per contorns. En canvi, quan aplicam la millora del filtre d'entorn donada per la regressió lineal, les línies de nivell són regulars i no es creen zones planes.

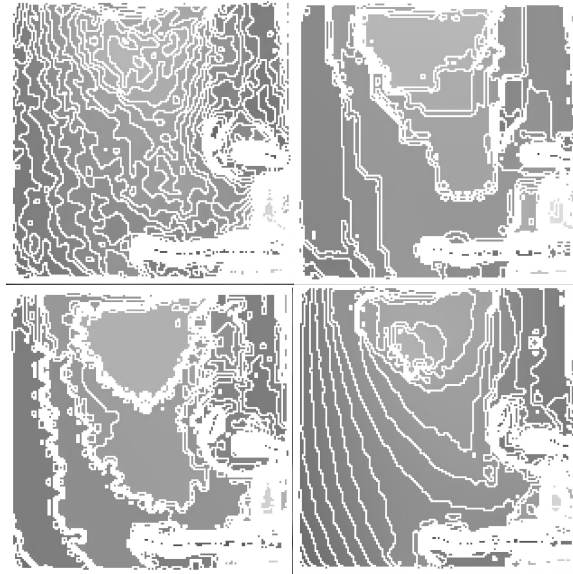


FIGURA 10: Línies de nivell de les imatges de la figura 9. Les línies de nivell després d'aplicar el filtre de Perona-Malik i el filtre d'entorn tendeixen a agrupar-se i crear zones planes. La correcció del filtre d'entorn per la regressió lineal filtra les línies de nivell pel moviment de la curvatura mitjana sense crear zones planes.

3 Aproximació no local i aplicacions

Com ja s'ha dit a la introducció, a [5] proposarem el model *NL-means* com una nova aproximació al processament d'imatges des del punt de vista no local. D'una banda, aquesta proposta generalitza el filtre d'entorn en un context no local i , de l'altra, utilitza la informació redundant i el principi d'autosimilitud de la imatge per treure avantatge sobre els models locals.

3.1 Un model probabilístic per a l'*NL-means*. Consistència del model

En aquest apartat donam un resultat per a la prova de la consistència de l'*NL-means* quan ho expresam en la forma d'un camp de Markov (vegeu [5]).

Si U és un camp aleatori i suposam que la imatge observada V és una realització d'aquest camp U , és a dir, $V(i) = U(i) + N(i)$. Sabem que si D és un operador de restauració, l'error quadràtic mig definit per $E[\|U - DV\|^2]$ es fa mínim quan, observada una realització de V , es té $Dv(i) = E[U(i)|V = v]$. És a dir, l'operador D és exactament l'esperança condicionada de U coneixent els valors de la imatge v . En el cas de la restauració, l'operador actua una vegada observat l'entorn $\mathcal{N}_i \setminus \{i\}$, és a dir, l'entorn del píxel i menys el punt mateix (propietat markoviana).

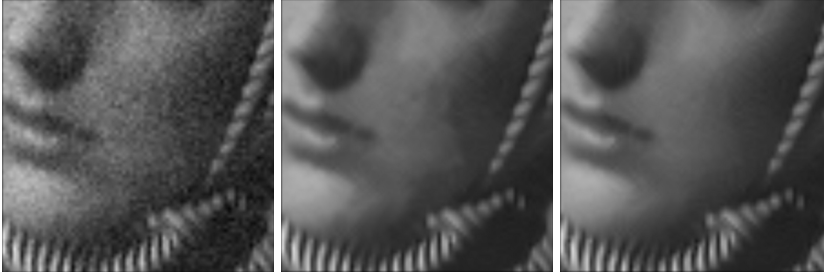


FIGURA 11: Comparació de l'*NL-means* i la correcció pel mètode de la regressió lineal sobre una imatge amb soroll. A l'esquerra: imatge amb soroll. Al centre: imatge filtrada amb l'*NL-means*. A la dreta: imatge després d'aplicar-li la correcció donada per la regressió lineal. La cara filtrada per l'*NL-means* presenta un efecte de xoc similar al filtre d'entorn. Aquests xocs no es creen quan aplicam el filtre corregit, que dona lloc a una imatge més natural.

Assumim la hipòtesi que el nostre procés és estacionari en el sentit següent: si $\{Z_t | t = 1, 2, \dots\}$ és un procés estocàstic, llavors és estacionari si la distribució conjunta $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ és la mateixa que $F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \tau \in N$. A la pràctica, aquest fet significa que quan la mida de la imatge creix, podem trobar cada vegada més mostres similars per a tots els detalls de la imatge.

Segui Z la seqüència de variables aleatòries $Z_i = \{V(i), V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})\}$ i denotam per $\hat{N}L_n$ el model *NL-means* aplicat a la subsuccessió de Z , $Z_n = \{V(i), V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})\}_{i=1}^n$ i on $v(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})$ ens dona el càlcul dels pesos en lloc de $v(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})$. Si denotam per $r(i)$ la $E[V(i) | V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\}) = v(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})]$, s'obté el resultat següent de l'esperança condicionada:

3 TEOREMA *Segui $Z = \{V(i), V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})\}$ per a $i = 1, 2, \dots$, un conjunt de processos estocàstics estrictes. Llavors,*

$$a) \quad |\hat{N}L_n(i) - r(i)| \rightarrow 0 \quad a.s.$$

per a $i \in \{1, \dots, n\}$.

b) *En el cas del model de soroll blanc additiu, l'esperança condicionada $E[V(i) | V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})] = E[U(i) | V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})]$ i a més és la funció de $V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\})$ que minimitza l'error quadràtic mitjà*

$$\min_g E[U(i) - g(V(\mathcal{N}_i \setminus \{i\}))]^2.$$

3.2 L'*NL-means* i la correcció per un model de regressió

El model de l'*NL-means* té un efecte de realçament, igual que els filtres d'entorn, a conseqüència de la creació de xocs. Per aquest motiu, podem aplicar la correcció donada per la regressió lineal.

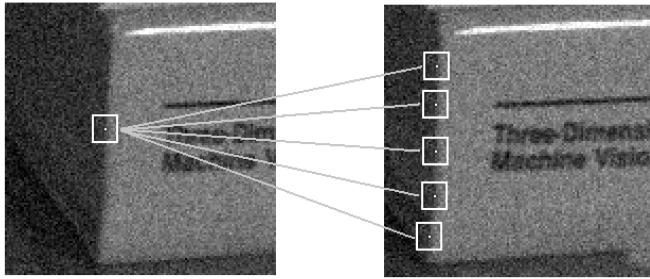


FIGURA 12: El problema d'obertura o ambigüïtat de les trajectòries és el problema més difícil en l'estimació del moviment. A priori existeixen múltiples opcions per a l'elecció del píxel en la imatge posterior, però l'algorisme d'estimació del moviment només en pot triar una.

Per poder aplicar la regressió lineal a l'algorisme de l'*NL-means* a un píxel $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, és necessari restringir la zona de cerca a un entorn $B_\rho(\mathbf{x})$. El valor de filtratge és donat per $ax_1 + bx_2 + c$, on a, b, c minimitzen

$$\min_{a,b,c} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (u(\mathbf{y}) - ay_1 - by_2 - c)^2 d\mathbf{y}$$

i

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{R}^2} G_a(t) |u(\mathbf{x}+t) - u(\mathbf{y}+t)|^2 dt\right).$$

La figura 11 mostra un experiment de restauració amb l'algorisme de l'*NL-means*. La imatge filtrada presenta un efecte de xoc similar al que es dona a l'algorisme d'entorn. La correcció de l'algorisme per la regressió lineal evita els xocs i restaura una imatge molt més natural.

3.3 Extensió de l'*NL-means* al cas de pel·lícules

L'algorisme de mitjanes no locals s'aplica particularment bé al cas de restauració de pel·lícules (vegeu [8]). A la gran majoria de referències dins el tema, els investigadors en aquesta aplicació han proposat filtrar un píxel d'una imatge d'una pel·lícula a partir del seguiment de la seva trajectòria dins les imatges anteriors i posteriors. De fet, això és equivalent a fer una mitjana amb la compensació del moviment. Malauradament, aquesta idea a la pràctica no funciona bé, ja que fins a aquests moments, els algorismes no són capaços de seguir la trajectòria de manera unívoca. Aquest fet sembla una mica sorprenent, però el que passa és que nosaltres seguim un objecte o un personatge en moviment i no pas on va a parar el píxel d'una imatge a la següent (vegeu la figura 12).

El problema d'obertura (*aperture problem*) significa que per a cada píxel podem trobar diferents desplaçaments donats per un píxel amb un nivell de gris i un bloc similar. Des del moment que en triam un, com passa amb els algorismes d'estimació del moviment, es perden els bons candidats per fer la restauració. Aplicat a una seqüència d'imatges, l'algorisme de mitjanes no locals

no té necessitat de calcular les trajectòries. Ell cerca simplement els píxels que s'assemblen en la seqüència d'imatges que conformen la pel·lícula. Llavors el problema d'obertura fins i tot esdevé positiu quan s'aplica l'*NL-means*, ja que en la cerca de píxels similars s'involucren els que ho són tant en l'espai com en el temps.

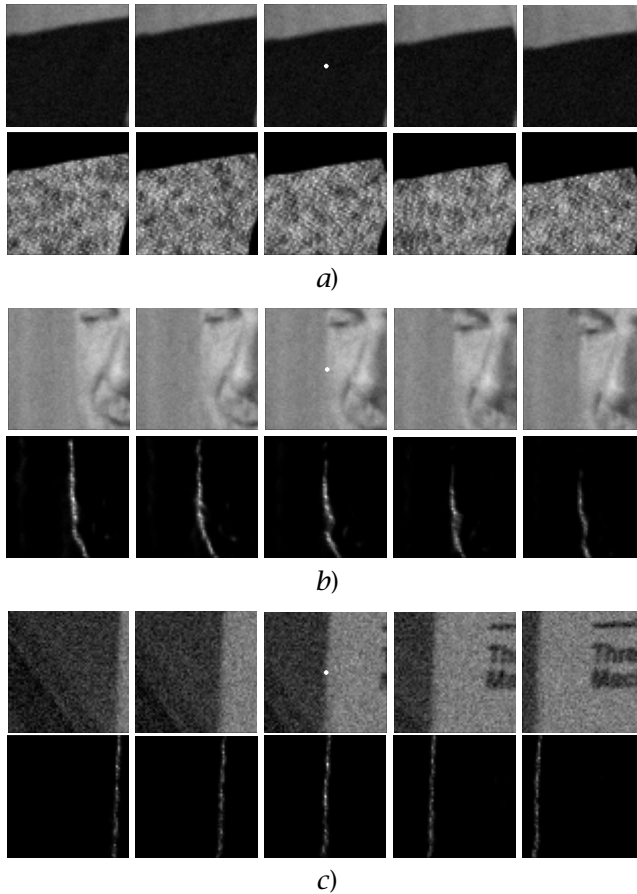


FIGURA 13: Distribució de probabilitats de l'*NL-means* per al cas de pel·lícules. Els pesos es distribueixen igualment en la successió d'imatges consecutives. Tots els bons candidats per a l'estimació del moviment participen a la mitjana i no solament els píxels d'una imatge fixa.

En aquest cas el model de l'*NL-means* per a pel·lícules agafa la forma

$$NLu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{C(\mathbf{x}, t)} \int_{\Omega} \int_R \exp\left(-\frac{(G_{\rho} * |u(\mathbf{x} + \cdot, t) - u(\mathbf{y} + \cdot, s)|^2)(0)}{h^2}\right) u(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds. \quad (10)$$

Noteu que el nucli gaussià G_ρ és 2D, però la integral és a la vegada sobre el temps i l'espai.

La figura 13 mostra les distribucions de probabilitat o pesos en el cas de pel·lícules i es pot veure com els pesos són igualment distribuïts en les imatges successives.

G	R	G	R	G	R	G	R
B	G	B	G	B	G	B	G
G	R	G	R	G	R	G	R
B	G	B	G	B	G	B	G
G	R	G	R	G	R	G	R
B	G	B	G	B	G	B	G
G	R	G	R	G	R	G	R
B	G	B	G	B	G	B	G

FIGURA 14: Matriu de Bayer *Color Filter Array* (CFA).

3.4 Aplicació de l'*NL-means* al problema de *demosaicking* o interpolació

Una imatge en color està representada per tres valors de color a cada píxel (vermell, verd i blau, conegut com a RGB). Així, doncs, una càmera necessitaria tres captors superposats per mesurar completament una imatge en color, o bé tres matrius CCD i un separador de longitud d'ona. Aquest procediment té certs inconvenients, entre els quals el cost econòmic per a les càmeres comercials, raó per la qual només s'aplica en certs dominis específics del camp de les imatges. Per aquest motiu, la majoria de càmeres, i en particular les càmeres comercials dirigides al gran públic, empenen una sola matriu CCD, la qual permet mesurar un sol color per a cada píxel. Llavors els dos valors restants que manquen a cada píxel han d'ésser interpolats. Aquesta interpolació o problema associat a la captació de la imatge s'anomena *demosaicking* en anglès.

La configuració dels colors seleccionats pel captor segueix normalment el que s'anomena una matriu de Bayer CFA [4]. Per a cada quadrat que conté quatre sensors, es mesuren dos colors verds, un de vermell i un de blau com es pot veure a la figura 14.

Els mètodes tradicionals intenten reconstruir la informació del valor de cada píxel als altres dos canals a partir del reconeixement de la direcció dominant donada per la geometria local al voltant de cada píxel. En el cas d'estructures oscil·lants o textures complexes, aquest tipus d'argument local no és capaç d'interpol·lar correctament la imatge i llavors es necessiten altres mètodes no locals per intentar reconstruir la informació. En els treballs de Gunturk



FIGURA 15: Artefactes comuns als algorismes de *demosaicking*. D'esquerra a dreta: *aliasing* donat pels colors vermell i blau, interpolació errònia de les direccions i l'efecte de *zipper*.

et al. [13] i Hirakawa *et al.* [14] podem trobar un resum dels diferents mètodes més coneguts que s'apliquen en *demosaicking*.

Els artefactes comuns que es poden crear a partir de la interpolació són: 1) *aliasing* o aparició d'artefactes de distorsió relacionats amb el mostreig de la imatge, en els canals vermell i blau; 2) errònia interpolació en les direccions principals; 3) creació de punts aïllats i contrastats, l'anomenat *zipper effect* en anglès (vegeu la figura 15 per a una il·lustració gràfica d'aquests artefactes).

A causa de la configuració CFA, el canal verd interpolat té normalment una qualitat visual major i una presència de més detalls i textura. Basant-se en aquest principi, la majoria dels mètodes més recents interpolen primer el canal verd i llavors condicionen la interpolació del vermell i del blau al color verd.

3.4.1 Demosaicking no local per a imatges de nivell de gris En un treball recent [9] proposam estendre el model no local per a la interpolació de mostres a partir d'un submostreig. Suposam que u és una imatge de nivell de gris

submostrejada per una fila i una columna com és el cas del canal verd en la màscara CFA i sigui Ω_u el subconjunt de la imatge on es coneixen aquests valors. Primer interpolam els píxels desconeguts per un algorisme clàssic (interpolació bilineal o anisotròpica) i obtenim la primera estimació u_0 . Aquesta primera aproximació pot contenir estructures errònies i artefactes. Per corregir els valors interpolats, aplicam l'*NL-means* per fer la mitjana solament dels píxels que pertanyen a Ω_u i aplicar aquesta mitjana només als píxels que no pertanyen a Ω_u . Les distàncies entre finestres són calculades sobre l'estimació inicial u_0 i, per tant, emprant els valors interpolats. Llavors l'algorisme no local per a la interpolació té la forma

$$NL[u](\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{\Omega_u} \exp\left(-\frac{(G_a * |u_0(\mathbf{x} + \cdot) - u_0(\mathbf{y} + \cdot)|^2)(0)}{h^2}\right) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (11)$$

amb $\mathbf{x} \notin \Omega_u$ i $C(\mathbf{x})$ és novament el factor de normalització. El nou valor és la mitjana dels valors de tots els punts originals de la imatge per als quals un entorn gaussià és similar a l'entorn de \mathbf{x} en u_0 . Atès que la interpolació pot contenir artefactes i certs errors, el valor de h ha de tendir cap a zero, ja que no es volen reduir les oscil·lacions, sinó transferir o copiar els valors coneguts als píxels que no són coneguts. A la pràctica, aplicam el procediment de manera iterativa amb valors decreixents de h .

3.4.2 Demosaicking no local per a imatges en color L'adaptació del mètode d'interpolació anterior per a imatges en color és directa. Cada canal es restaura fent la mitjana dels valors de la CFA, original però les distàncies entre finestres es calculen sobre la imatge original de color u_0 . Llavors l'expressió de l'*NL-means* queda com

$$NL[u](\mathbf{x}) = \frac{1}{C_u(\mathbf{x})} \int_{\Omega_u} \exp\left(-\frac{(G_a * \|u_0(\mathbf{x} + \cdot) - u_0(\mathbf{y} + \cdot)\|^2)(0)}{h^2}\right) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (12)$$

amb $u \in \{r, g, b\}$, $\mathbf{x} \notin \Omega_u$ i

$$C_u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_u} \exp\left(-\frac{(G_a * \|u_0(\mathbf{x} + \cdot) - u_0(\mathbf{y} + \cdot)\|^2)(0)}{h^2}\right) d\mathbf{y}.$$

Per a cada punt \mathbf{x} , l'algorisme de l'*NL-means* interpola el valor del color desconegut fent la mitjana dels valors de la matriu original CFA amb un entorn gaussià similar en u_0 . Ben igual que en el cas de les imatges de nivell de gris i amb la idea d'eliminar les estructures errònies i els artefactes creats de u_0 , empram l'estratègia de refinament amb la reducció iterativa del pas de h .

Una millora del mètode es té si aplicam la mitjana anterior al canal verd i a la diferència de colors $r - g$ i $b - g$.

Noteu que l'algorisme anterior també redueix les oscil·lacions petites degudes al soroll. Aquesta reducció no és dràstica, ja que es pren un valor petit de h a la iteració final i, per tant, es fa la mitjana només amb els píxels que tinguin

gairebé la mateixa finestra al seu voltant. La figura 16 compara l'aplicació del model no local amb un conjunt d'algorismes més coneguts i prova la millora que es té en la recuperació de la textura quan iteram el paràmetre h .

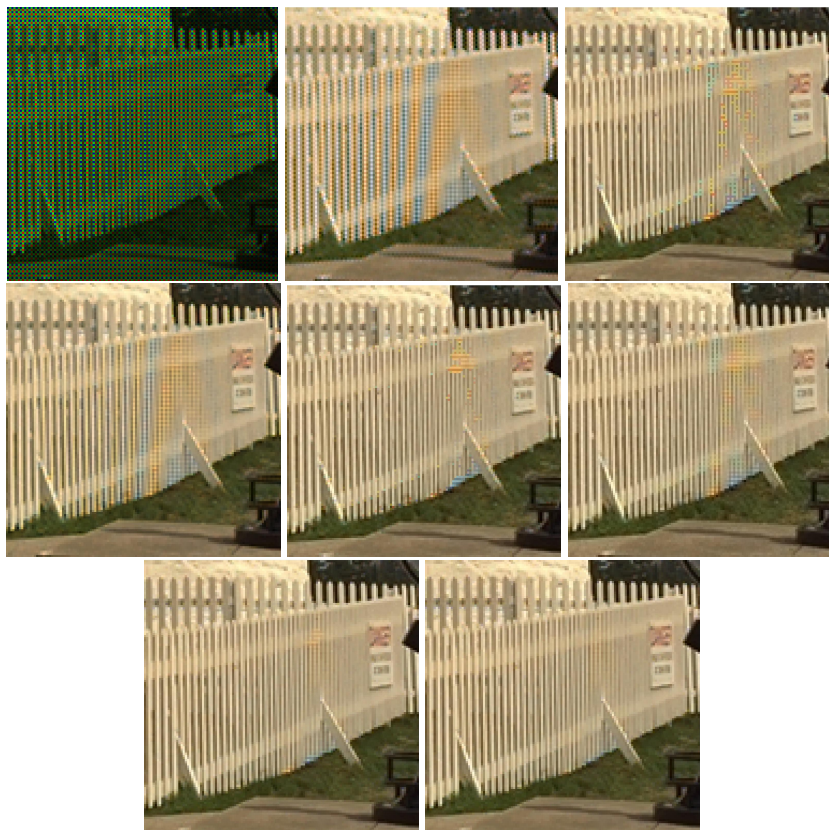


FIGURA 16: Experiència sobre la qualitat visual en l'aplicació del *de-mosaicking* i comparació amb els algorismes mes coneguts. De dalt a baix i d'esquerra a dreta: imatge original, bilineal, Adams, Kimmel, Hiraakawa, Gunturk, *NL-means* i *NL-means* amb la successió decreixent de h , $\{64, 32, 16, 4, 1\}$. L'*NL-means* millora els resultats dels altres models, però no recupera completament la geometria local de la textura. Només iterant el valor de h es recupera totalment la textura original.

4 Conclusions i treball futur

En aquest treball s'ha plantejat el problema de la restauració i filtratge de les imatges digitals. Bàsicament, els models clàssics estan basats a fer mitjanes de píxels que són propers al nivell espacial i/o del valor de gris. Aquests models,

quan el radi de l'entorn tendeix a zero, tendeixen, asimptòticament, cap a una EDP d'evolució, la qual, segons les condicions imposades al model, ens dona equacions ja conegudes per a filtratge d'imatges. Un nou model no local de fer mitjanes, l'*NL-means*, basat en la propietat d'autosimilitud de la imatge, i que compara entorns dels valors dels píxels, ha estat introduït en un treball recent [5] com una millora en la restauració d'imatges. Aquesta mateixa idea no local es pot extrapolar a altres aplicacions, com és el cas de la interpolació de dades a partir d'un submostreig d'aquestes. De fet, les distribucions de probabilitat de la figura 13 mostren que les comparacions de finestres donen informació sobre l'agrupament i la detecció d'estructures coherents, la qual cosa es podria relacionar amb la formalització matemàtica de la teoria de la Gestalt, proposada a [10].

De cara al treball futur, el desenvolupament matemàtic de l'anàlisi no local és una línia de treball futura i, de fet, ja existeixen treballs en aquest sentit (vegeu [12], [16]). Els problemes, en què la comparació i la cerca d'estructures similars en una sèrie d'imatges o base de dades és l'objectiu principal, s'adapten de manera especial a la filosofia de l'*NL-means*.

Un altre problema interessant és la relació del model *NL-means* i l'anàlisi no local amb l'anàlisi de Fourier. La figura 4 mostra com l'aplicació de l'*NL-means* és capaç de restaurar al mateix temps l'espectre de Fourier d'una textura preservant les altes freqüències. Finalment, la caracterització funcional dels espais funcionals no locals i la seva relació amb l'espai més comunament emprat per modelitzar les imatges, l'espai BV (o funcions de variació fitada), és una altra línia de treball interessant per esbrinar les propietats d'aquests models i sobre la qual alguns grups ja han començat a treballar.

Referències

- [1] ALVAREZ, L.; LIONS, P.-L.; MOREL, J.-M. «Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (ii)». *Journal of numerical analysis*, 29 (1992), 845-866.
- [2] ANDREU, F.; CASELLES, V.; DIAZ, J.; MAZON, J. «Qualitative properties of the total variation flow». *Journal of Functional Analysis*, 188 (2) (2002), 516-547.
- [3] ATTNEAVE, F. «Some informational aspects of visual perception». *Psychol Rev*, 61 (3) (1954), 183-93.
- [4] BAYER, B. «Color imaging array». U.S. Patent 3 971 065 (1976).
- [5] BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J. «A review of image denoising algorithms with a new one». *Multiscale Modeling and Simulation*, 4 (2) (2005), 490-530.
- [6] BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J. «Neighborhood filters and pde's». *Numerische Mathematik*, 105 (1) (2006), 1-34.
- [7] BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J. «The staircasing effect in neighborhood filters and its solution». *IEEE Trans. on Image Processing*, 15 (6) (2006), 1499-1505.

- [8] BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J. «Image and movie denoising by nonlocal means». *Int. Journal of Computer Vision*.
- [9] BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J.; SBERT, C. *Non local demosaicing*. Rep. Tèc. 2007-15, CMLA, ENS Cachan 2007.
- [10] DESOLNEUX, A.; MOISAN, L.; MOREL, J. «Maximal meaningful events and applications to image analysis». *Ann. Statist*, 31 (6) (2003), 1822-1851.
- [11] EFROS, A.; LEUNG, T. «Texture synthesis by non parametric sampling». A: *Proc. Int. Conf. Computer Vision*. 2 (1999), 1033-1038.
- [12] GILBOA, G.; OSHER, S. «Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation». CAM 06-47, UCLA (2006).
- [13] GUNTURK, B.; ALTUNBASAK, Y.; MERSEREAU, R. «Color plane interpolation using alternating projections». *Image Processing, IEEE Transactions on*, 11 (9) (2002), 997-1013.
- [14] HIRAKAWA, K.; PARKS, T. «Adaptive homogeneity-directed demosaicing algorithm». *Image Processing, IEEE Transactions on*, 14 (3) (2005), 360-369.
- [15] KIMIA, B.; TANNENBAUM, A.; ZUCKER, S. «On the evolution of curves via a function of curvature i the classical case». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 163 (2) (1992), 438-458.
- [16] KINDERMANN, S.; OSHER, S.; JONES, P. «Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals». *SIAM, Mult. Mod. Sim.*, 4 (4) (2005), 1091-1115.
- [17] LEE, J. «Digital image smoothing and the sigma filter». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 24 (1983), 255-269.
- [18] OSHER, S.; RUDIN, L. «Feature oriented image enhancement using shock filters». *SIAM J. Numerical Analysis*, 27 (1990), 919-940.
- [19] PERONA, P.; MALIK, J. «Scale space and edge detection using anisotropic diffusion». *IEEE Pat. Anal. Mach. Intell.*, 12 (1990), 629-639.
- [20] RUDIN, L.; OSHER, S.; FATEMI, E. «Nonlinear total variation based noise removal algorithms». *Physica D*, 60 (1992), 259-268.
- [21] SETHIAN, J. «Curvature and the evolution of fronts». *Comm. Math. Phys.*, 101.
- [22] YAROSLAVSKY, L.; EDEN, M. *Fundamentals of Digital Optics*. Birkhäuser, 1996.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA
UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS
CRA. DE VALLDEMOSSA, KM. 7,5
07122 PALMA DE MALLORCA, BALEARS
toni.buades@uib.es, tomeu.coll@uib.es